Problème

$$f(x) = \frac{3}{e^{3x}+1} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Partie A

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x}+1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $y=0$ (axe des abscisse) est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

c) $e3x > 0 \Rightarrow e^{3x}+1 > 0$ or $3 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ est toujours au dessus de l'axe $(O, \vec{\imath})$ asymptote.

2) $\mathcal{D} : y = 3$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x}+1 = 1$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3 \Rightarrow \mathcal{D} : y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$

c) $$3 - \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1} = \frac{3e^{3x}+3-3e^{3x}}{e^{3x}+1} = \frac{3}{e^{3x}+1} = f(x)$$

donc $f(x) = 3 - \dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}+1} \Rightarrow f(x) - 3 = -\dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}$

d) $e^{3x} > 0 \Rightarrow 3e^{3x} > 0$ et $e^{3x}+1 > 0 \Rightarrow f(x) - 3 < 0$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ est sous la droite $\mathcal{D}$.

3) a) $f(x) = \dfrac{3}{e^{3x}+1} = 3 \times \dfrac{1}{e^{3x}+1}$ en posant $u(x) = e^{3x}+1$

$$f = 3 \times \frac{1}{u} \Rightarrow f' = 3 \times \left(-\frac{u'}{u^2}\right) = -\frac{3u'}{u^2}$$

or $u'(x) = 3e^{3x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{3 \times 3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2} = -\dfrac{9e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$

b) $e^{3x}>0 \Rightarrow 9e^{3x}>0$ or $(e^{3x}+1)^2>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f$ décroissante

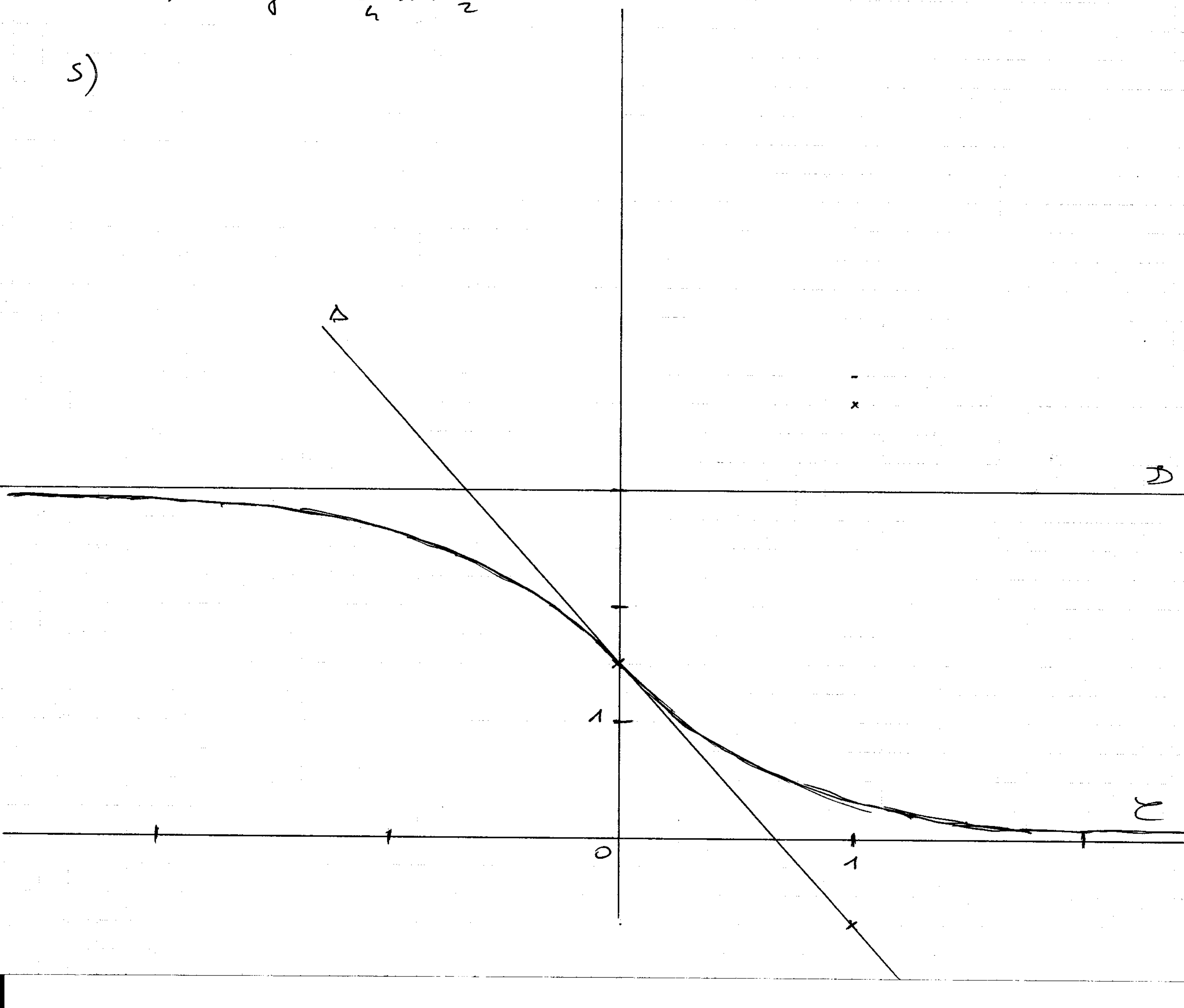
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	0

4) $\Delta : y = f'(0)(x-0)+f(0)$ or $f'(0) = \dfrac{-9e^0}{(e^0+1)^2} = \dfrac{-9}{2^2} = -\dfrac{9}{4}$

et $f(0) = \dfrac{3}{1+1} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \Delta : y = -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{3}{2}$

5)



Partie B

1) a) $g(x) = \dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}$

en posant $u(x) = e^{3x}+1$ $\quad u'(x) = 3e^{3x}$

donc $g = \dfrac{u'}{u} \Rightarrow G = \ln|u|$

$\Rightarrow G(x) = \ln(e^{3x}+1)$ car $e^{3x}+1 > 0$

b) $f(x) = 3 - g(x) \Rightarrow F(x) = 3x - F(x) = 3x - \ln(e^{3x}+1)$

2) $a > 0$

a) $\mathcal{A}(a) = \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \left(3 - \dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}\right)dx$

b) donc $\mathcal{A}(a) = F(a) - F(0)$ or $F(a) = 3a - \ln(e^{3a}+1)$

et $F(0) = 3\times 0 - \ln(e^0+1) = -\ln 2$

donc $\mathcal{A}(a) = 3a - \ln(e^{3a}+1) + \ln 2$

c) donc $\mathcal{A}(a) = \ln(e^{3a}) - \ln(e^{3a}+1) + \ln 2$

$= \ln(e^{3a}) + \ln 2 - \ln(e^{3a}+1)$

$= \ln(2e^{3a}) - \ln(e^{3a}+1)$

$= \ln\left(\dfrac{2e^{3a}}{e^{3a}+1}\right) = \ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-3a}}\right)$

$\lim\limits_{a\to+\infty} -3a = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{a\to+\infty} e^{-3a} = 0$

donc $\lim\limits_{a\to+\infty} 1+e^{-3a} = 1$ et donc $\lim\limits_{a\to+\infty} \dfrac{2}{1+e^{-3a}} = 2$

Donc $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathcal{A}(a) = \ln 2$